§5.2 一般可测函数的积分

一、定义与性质.

$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx.$

积分存在：$\int_E f^+(x)\,dx$、$\int_E f^-(x)\,dx$ 至多一个为∞

可积：$\int_E f^+(x)\,dx$、$\int_E f^-(x)\,dx$ 均有限.

几何意义：下方图形测度的代数和.

Prop.

(1) $f=g$ a.e. on E，则 $\int_E f(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.$

Pf. $E = E[f\neq g] \cup E[f=g] = E_1 \cup E_2$, $\chi_E = \chi_{E_1} + \chi_{E_2}$

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,dx &= \int_E f(x)\chi_{E_1}(x)\,dx + \int_E f(x)\chi_{E_2}(x)\,dx \\ &= \int_{E_1} f(x)\,dx + \int_{E_2} f(x)\,dx = \int_{E_2} g(x)\,dx + 0 \\ &= \int_{E_1} g(x)\,dx + \int_{E_2} g(x)\,dx = \int_E g(x)\,dx.\end{aligned}$$

(2) $f\in L(E_1)$, $f\in L(E_2)$，则 $f\in L(E_1\cup E_2)$

Pf. $\int_{E_1\cup E_2} f^+(x)\,dx \le \int_{E_1} f^+(x)\,dx + \int_{E_2} f^+(x)\,dx < +\infty.$

$\int_{E_1\cup E_2} f^-(x)\,dx \le \int_{E_1} f^-(x)\,dx + \int_{E_2} f^-(x)\,dx < +\infty.$

(3) $f\in L(E_i)$, $i=1,2,\cdots \not\Rightarrow f\in L(\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i)$, f 在 $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ 上积分存在

例如：$f(x)=1$, $E_i=[i,i+1]$, $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i = [1,+\infty) = E$

$\int_E f(x)\,dx = +\infty$

$f(x) = 1\cdot(-1)^i$, $E_i=[i,i+1]$, f 在 $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ 上积分不存在.

(4) f 可积，则 $\left|\int_E f(x)\,dx\right| \le \int_E |f(x)|\,dx.$

Pf. $\left|\int_E f(x)\,dx\right| = \left|\int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx\right| \le \left|\int_E f^+(x)\,dx\right| + \left|\int_E f^-(x)\,dx\right|$

(5) f 可积，则 f 几乎处处有限.

Pf. f a.e. 有限 $\Leftrightarrow f^+, f^-$ a.e. 有限.

记 $a = \int_E f^+(x)\,dx$，则 $a \geq \int_{E[f^+=+\infty]} f^+(x)\,dx \geq N\, m(E[f^+=+\infty])$, $\forall N$

于是 $m(E[f^+=+\infty]) \leq \frac{a}{N}$, $\forall N$, 则 $m(E[f^+=+\infty]) = 0$.

$f^-(x)$ 同理可证.

Def. $f(x) \in L(E)$，则 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, s.t. $\forall e \subset E$, $m(e)<\delta$,

有 $\left|\int_e f(x)\,dx\right| < \varepsilon$, $\left|\int_e f(x)\,dx\right| \leq \int_e |f(x)|\,dx < \varepsilon$. 称为绝对连续性.

Pf. f 可积 $\Rightarrow |f|$ 可积，$0 \leq |f| = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}(x)$, $c_k>0$.

记 $M = \sup\{c_k : k=1,2,\cdots\} \geq |f|$，则有：

$\int_e |f|\,dx \leq \int_e M\,dx < \delta \cdot M$，于是取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ 有 $\int_e |f(x)|\,dx < \varepsilon$.

对一般的 $|f|$，取单增的简单函数列逼近：

$|f|$ 可积，$\exists \{\varphi_k\}$ 简单，$\varphi_k \uparrow |f|$，于是 $\int_E |f|\,dx = \lim_{k\to+\infty} \int_E \varphi_k\,dx$.

$\forall \varepsilon>0$, $\exists K>0$ s.t. $\forall k \geq K$, $\left|\int_E |f|\,dx - \int_E \varphi_k\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$

于是 $\int_e |f|\,dx \leq \left|\int_e (|f|-\varphi_K)\,dx\right| + \left|\int_e \varphi_K\,dx\right|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$，其中右侧由 $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ 取得保证.

这里取 φ_K 是为了保证 $\left|\int_e \varphi_K\,dx\right|$ 有界，$\{\varphi_k\} \uparrow |f|$

Thm. (Lebesgue 控制收敛)

$\{f_n\}$ 几乎处处有限且可测，$F(x) \geq |f_n(x)|$，$f_n \Rightarrow f$，则 f 可积，

且 $\int_E f\,dx = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_E f_n\,dx$.

Pf. $f_n \Rightarrow f$: $\forall \varepsilon$, $\lim_{n\to+\infty} m(E[|f_n - f| \geq \varepsilon]) = 0$.

F 可积：$\int_E F(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} F(x)\,dx$, $E_n = E \cap O(a,n)$ (Levi)

由绝对连续性，$\forall \varepsilon>0$, $\forall \delta>0$, $m(A)<\delta$, $\int_{A\cap E} F(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{4}$.

往证 $\int_E |f_n-f|dx=0$：

(1) $m(E)=0$，显然成立

(2) $m(E)>0$ 但有界，$\int_{E[|f_n-f|>\frac{\varepsilon}{4m(E)}]}+\int_{E[|f_n-f|\leq\frac{\varepsilon}{4m(E)}]}<\frac{2\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}$

(3) $m(E)$ 无界，令 $E_N=E\cap[0,N]$，则 $E_N\uparrow E$，$\chi_{E_N}\uparrow\chi_E$

Rem. 依测度收敛可换成几乎处处收敛，近乎一致收敛.